

Transversalkoeffizienten ist ein weiterer Beweis erbracht worden, wobei allerdings noch zu untersuchen ist, ob der beobachteten Abweichung um den Faktor 2 eine entscheidende Bedeutung zukommt.

Weitere Untersuchungen über die Abweichung des Temperaturganges der Transversalkoeffizienten vom quadratischen Verlauf sowie Messungen an anders orientierten Proben sind in Vorbereitung.

Die beschriebenen Untersuchungen wurden mit Geräten durchgeführt, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellt worden waren. Einem der Autoren (T. HALPERN) wurde die Durchführung dieser Arbeit durch ein Stipendium des Argentinischen Consejo Nacional de Investigaciones ermöglicht. Er möchte an dieser Stelle auch dem Direktor des Max-Planck-Instituts für Metallforschung, Herrn Prof. Dr. W. KÖSTER, für die Gelegenheit danken, an seinem Institut zu arbeiten.

Zur Theorie der Ohm'schen Heizung vollionisierter Plasmen

Von H. SCHRADER, W. BEZ, K. H. HÖCKER und H. J. KAEPELER

Aus dem Institut für Hochtemperaturforschung an der Technischen Hochschule Stuttgart
(Prof. Dr. KLUGE, Prof. Dr. HÖCKER)

(Z. Naturforsch. 15 a, 155–168 [1960]; eingegangen am 1. August 1959)

Ausgehend von einer Lösung der BOLTZMANN-Gleichung durch eine für Plasmen erweiterte 13-Momenten-Approximation werden die Gleichungen für die OHMSche Heizung eines vollionisierten Plasmas aufgestellt. Der Einfluß eines Magnetfeldes wird vernachlässigt. Als weitere Näherungen werden die anisotropen Anteile des Drucktensors und der Wärmestromvektor in der Orthogonalreihenentwicklung für die Wahrscheinlichkeitsdichte vernachlässigt, so daß eine lokale MAXWELL-Verteilung resultiert. Die Vernachlässigungen werden im einzelnen begründet. Die Stoßintegrale, die in den so vereinfachten Gleichungen auftreten, werden für ein beim DEBYE-Radius abgeschnittenes COULOMB-Potential berechnet. Man erhält somit ein simultanes System von Differentialgleichungen, welches für eine praktische Berechnung der OHMSchen Heizung bei beliebig starken elektrischen Feldern geeignet ist.

Einige bei uns durchgeführte Versuche¹ ließen es wünschenswert erscheinen, detaillierte Rechnungen zur OHMSchen Heizung vollionisierter Plasmen, insbesondere bei relativ hoher Teilchendichte, durchzuführen. Zu diesem Zweck wurde versucht, eine kinetische Theorie zu verwenden, die es gestattet, gewisse Erweiterungen über die bisher bekannten Methoden zur Berechnung der OHMSchen Heizung hinaus durchzuführen und die gleichzeitig einen Ansatz zu einer ziemlich allgemeinen Beschreibung des Plasmaverhaltens bietet. Wenn auch in der vorliegenden Behandlung eine Reihe von Annahmen zur Vereinfachung gemacht wurden, so erscheint es uns grundsätzlich ohne wesentliche Schwierigkeiten möglich, in einer Fortführung der Arbeit die meisten dieser Annahmen fallen zu lassen.

In einer kinetischen Beschreibung der OHMSchen Heizung verwendet BRAGINSKII² die ENSKOGsche Methode zur Lösung der BOLTZMANN-Gleichung. Für eine wesentlich erweiterte Behandlung jedoch scheint

uns die auf einer Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte nach ihren Momenten fußende Lösung der BOLTZMANN-Gleichung geeigneter. Die Grundlagen hierzu werden im folgenden Abschnitt ausgeführt. BRAGINSKII berechnet unter Vernachlässigung der Ionengeschwindigkeit die Reibungskraftdichte (Stoßintegral in den Bewegungsgleichungen) der Elektronen in nullter und erster Näherung, sowie die Aufheizungsenergie für Elektronen und Ionen. In den von uns vorgelegten Rechnungen soll die Ionengeschwindigkeit mit berücksichtigt werden.

Eine Theorie der OHMSchen Heizung ist von Interesse z. B. für Versuche zur Erzielung extrem hoher Temperaturen für Fusionszwecke. In diesem Zusammenhang wurden eine Reihe von Arbeiten bekannt. SPITZER³ gibt in einer Übersicht zum Stellaratorprogramm eine kurze Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten zur Aufheizung eines Plasmas. Eingehender beschäftigen sich BERGER und Mitarbeiter⁴ mit der Theorie der OHMSchen Heizung. Unter

¹ W. KLUGE u. K. H. HÖCKER, Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala, August 1959.

² S. I. BRAGINSKII, J. Exp. Theor. Phys. USSR 6, 358 [1958].

³ L. SPITZER, JR.: The Stellarator Concept. In: Proc. 2nd UN International Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 32, Genf 1958, S. 181.

⁴ J. M. BERGER, I. B. BERNSTEIN, E. A. TRUMAN u. R. M. KULSRUD, On the Ionization and Ohmic Heating of a Helium Plasma. In: Proc. 2nd UN Intern. Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Vol. 32, Genf 1958, S. 197.



Annahme einer MAXWELLSchen Geschwindigkeitsverteilung für die Elektronen wird die instationäre Heizung eines Heliumplasmas unter Berücksichtigung der nur von der Elektronentemperatur abhängigen Ionisation und Strahlung numerisch berechnet. Die Heizung im britischen Zeta-Gerät wurde von THOMPSON⁵ diskutiert. Eine eingehende Diskussion der Heizungsverhältnisse bei einer Pinch-Entladung geben BRAGINSKII und SHAFRANOV⁶.

Die OHMSche Heizung eines Plasmas kann modellmäßig etwa folgendermaßen verstanden werden. Infolge des angelegten elektrischen Feldes werden Elektronen und Ionen in entgegengesetzten Richtungen beschleunigt. Näherungsweise kann man die Energieaufnahme der Ionen aus dem Feld gegenüber derjenigen der infolge ihrer geringen Masse rasch auf große Geschwindigkeiten beschleunigten Elektronen vernachlässigen. Infolge der gegenseitigen COULOMB-Wechselwirkung erfolgt Impuls- und Energieaustausch zwischen Elektronen und Ionen. Mittelt man über die einzelnen Impulsaustauschakte, so entsteht das Bild, daß sich die beiden Gase (Elektronengas und Ionengas) gegenseitig durchdringen und infolge einer „inneren Reibung“ (kumulativer Effekt der Wechselwirkung) eine gegenseitige Kraft, die „Reibungskraft“, aufeinander ausüben. Man kann nun sagen, je größer die Reibungskraft in einem Plasma, desto größer ist die Heizwirkung; man zieht also die Reibungskraft als Kriterium für die Wirkung der OHMSchen Heizung heran.

Der Begriff der Reibungskraft entstand bei EINSTEIN⁷ in seiner Betrachtung der BROWNSchen Bewegung. Die Übertragung auf die Diffusion von Ladungsträgern erfolgte von JOHNSON und HULBERT⁸. Sie geben eine Behandlung der Diffusion, indem die Wirkung eines Mediums auf ein diffun-

dierendes Gas als dissipative Kraft dargestellt wird. Die zuerst phänomenologisch abgeleiteten Gleichungen wurden außerdem auf gaskinetischem Wege mit Hilfe der ersten ENSKOGSchen Näherung erhalten. Über die Bedeutung der Reibungskraft für astrophysikalische Probleme wird auf die Arbeiten von CHANDRASEKHAR und BALESCU⁹ verwiesen. Die Anwendung auf ein Plasma geschah durch SCHLÜTER¹⁰. Er gibt eine Aufstellung der Bewegungsgleichungen für ein dreikomponentiges Plasma (Elektronen, Ionen, Neutralteilchen) unter Einführung von Reibungskräften, welche (nach der kinetischen Gastheorie in erster Näherung) proportional zur relativen Diffusionsgeschwindigkeit angenommen werden.

Im folgenden sollen nun mit Hilfe gaskinetischer und statistischer Methoden die Gleichungen für die OHMSche Heizung eines vollionisierten Plasmas abgeleitet werden. Dabei werden eine Reihe von Annahmen zur Vereinfachung gemacht, die im einzelnen begründet werden. Die Reibungskraft und die Energieaustauschglieder resultieren als Stoßintegrale, die mit den eingeführten Näherungen gelöst werden. Die Ergebnisse werden am Ende der Arbeit diskutiert, und es wird aufgezeigt, wie einige der Näherungen fallen gelassen werden können.

I. Beschreibung des Plasmas durch die Boltzmann-Gleichung

Ausgangspunkt gaskinetischer Betrachtungen ist in vielen Fällen die BOLTZMANNsche Stoßgleichung. Diese Integrodifferentialgleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\bar{f}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ im Phasenraum (μ -Raum). Sie lautet für die r -te Komponente eines nicht-reagierenden Plasmas¹¹

$$\frac{\partial \bar{f}_r}{\partial t} + \mathbf{v}_r \cdot \frac{\partial \bar{f}_r}{\partial \mathbf{r}} + \frac{Z_r e}{m_r} \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_r \times \mathfrak{B} \right\} \cdot \frac{\partial \bar{f}_r}{\partial \mathbf{v}_r} = \sum_s \int \int (\bar{f}'_r \bar{f}'_s - \bar{f}_r \bar{f}_s) g_{rs} b_{rs} d\mathbf{b}_{rs} d\varphi d\mathbf{v}_s = \sum_s A_{rs}. \quad (1)$$

Die Berechtigung der Verwendung der BOLTZMANN-Gleichung für Plasmen ist infolge der kumulativen

COULOMB-Wechselwirkung sehr in Frage gestellt. Zunächst kann die BOLTZMANN-Gleichung für ein Plasma

⁵ W. B. THOMPSON, S. F. EDWARDS, I. HUBBARD u. S. I. ROBERTS, Theoretical Problems Suggested by ZETA. In: Proc. 2nd UN Int. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy. Vol. 32, Genf 1958, S. 65.

⁶ S. I. BRAGINSKII u. V. D. SHAFRANOV, High-Temperature Pinches. In: Proc. 2nd UN Int. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy. Vol. 31, Genf 1958, S. 43.

⁷ A. EINSTEIN, Ann. Phys., Lpz. 17, 549 [1905].

⁸ M. H. JOHNSON u. E. O. HULBERT, Phys. Rev. 79, 802 [1950]. — M. H. JOHNSON, Phys. Rev. 89, 977 [1953].

⁹ S. CHANDRASEKHAR, Ap. J. 97, 255, 263 [1943]. — R. BALESCU, Transport Processes in Statistical Mechanics (I. PRIGOGINE, Ed.), S. 37. Interscience Publ., New York 1958.

¹⁰ A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 6a, 73 [1951].

^{*} Die Wahrscheinlichkeitsdichte \bar{f} wird hier aus technischen Gründen ausnahmsweise in Fraktur gesetzt. Es handelt sich also nicht um einen Vektor.

¹¹ S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, Mathematical Theory of Nonuniform Gases. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1952, S. 323.

deshalb nicht als streng gültig betrachtet werden, weil die HAMILTON-Funktion eines Gesamtplasmas nicht in den Koordinaten der Einzelteilchen separierbar ist und somit keine Beschreibung im μ -Raum zuläßt. Für den Fall der Transporterscheinungen eines Elektronengases in Festkörpern¹² wurde gezeigt, daß die BOLTZMANN-Gleichung für den Fall extremer Verdünnung gültig ist. Numerische Abschätzungen mit Hilfe eines Arguments über den Einfluß elektrostatischer Mikrofelder auf maßgebliche Vorgänge in Plasmen zeigen¹³, daß man näherungsweise ab etwa einer Temperatur von 10^5 °K die BOLTZMANN-Gleichung zur näherungsweisen Beschreibung der hier interessierenden Plasmen anwenden kann. Von einer Anwendung der LIOUVILLE-Gleichung¹⁴ soll hier abgesehen werden.

Zur BOLTZMANN-Gleichung ist folgendes zu erwähnen: \tilde{f}_r ist diejenige Wahrscheinlichkeitsdichte, die im System eines mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_r der r -ten Komponente mitbewegten Beobachters festgestellt wird. \bar{v}_r ist gegeben durch

$$\bar{v}_r = \frac{1}{n_r} \int \bar{v}_r \tilde{f}_r(\mathbf{r}, \bar{v}_r, t) d\bar{v}_r. \quad (2)$$

Die Normierung von \tilde{f}_r gibt

$$\int \tilde{f}_r(\mathbf{r}, \bar{v}_r, t) d\bar{v}_r = n_r. \quad (3)$$

Über spezielle Eigenschaften der BOLTZMANN-Gleichung berichtet GRAD¹⁵ in einer ausführlichen Arbeit.

Zur Beschreibung des betrachteten Systems mit seinen Einzelkomponenten ist die explizite Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_r(\mathbf{r}, \bar{v}_r, t)$ erforderlich. Diese folgt aus einer Lösung der BOLTZMANN-Gleichung. Hier soll die Lösung für \tilde{f}_r als Momentenproblem der Statistik aufgefaßt werden und diese von KAEPELER¹³ und von KOLODNER¹⁶ für Plasmen entwickelten Methoden sind im wesentlichen Erweiterungen des 13-Momenten-Verfahrens von GRAD¹⁷.

In diesem Verfahren wird die Wahrscheinlich-

keitsdichte $\tilde{f}_r(\mathbf{r}, \bar{v}_r, t)$ in eine Reihe HERMITEScher Polynome entwickelt*,

$$\tilde{f} = \tilde{f}^{(0)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{ij\dots} a_{ij\dots}^{(\nu)} H_{ij\dots}^{(\nu)}(\mathbf{u}). \quad (4)$$

Dabei ist

$$H_{ij}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = \frac{(-1)^\nu}{\omega(\mathbf{u})} \frac{\partial^\nu \omega(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j \dots} \quad (5)$$

ein Tensor ν -ter Stufe und ein HERMITESches Polynom ν -ten Grades, wobei

$$\omega(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-1/2 \mathbf{u}^2} \quad (6)$$

die Gewichtsfunktion mit der Normierung

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$$

ist. Die Orthogonalitätsrelation für diese Polynome ist gegeben durch

$$\int \int \int \omega(\mathbf{u}) H_{ij\dots}^{(\nu)} H_{kl\dots}^{(\mu)} d\mathbf{u} = \delta_{ij\dots, kl\dots}^{\nu\mu}, \quad (7)$$

wobei

$$\delta_{ij\dots, kl\dots}^{\nu\mu} = \begin{cases} \nu! & \text{für } \nu = \mu \text{ und } ij\dots = kl\dots, \\ 0 & \text{für } \nu \neq \mu \text{ oder } ij\dots \neq kl\dots \end{cases}$$

eine Verallgemeinerung des KRONECKER-Symbols ist. Demzufolge hat man

$$\int \int \int \omega [H_{ij\dots}^{(\nu)}]^2 d\mathbf{u} = \nu!. \quad (8)$$

Zur Reihenentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte wird der dimensionslose Geschwindigkeitsvektor**

$$\mathbf{u} = \frac{\mathfrak{B}}{(RT)^{1/2}}, \quad d\mathbf{u} = (RT)^{-3/2} d\mathfrak{B} \quad (9)$$

mit der Eigengeschwindigkeit

$$\mathfrak{B} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}; \quad \int \mathfrak{B} \tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{v}}, t) d\bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (10)$$

eingeführt***. Es sei ferner

$$f^{(0)} = \frac{\varrho}{m(RT)^{3/2}} \omega(\mathbf{u}) \quad (11)$$

** RT hat nach Gl. (17) die Dimension cm^2/sec^2 . Ferner ist

$$d\mathbf{u} = du_x du_y du_z = \frac{dV_x}{(RT)^{1/2}} \frac{dV_y}{(RT)^{1/2}} \frac{dV_z}{(RT)^{1/2}}.$$

*** Die auf $\mathfrak{B}_r = \mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}_r$ basierenden Momente werden die individuellen spezifischen genannt, während die spezifischen Momente auf der anderen Definition der Eigengeschwindigkeit

$$\mathfrak{B}_r = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0 \text{ mit } \mathbf{v}_0 = \frac{1}{\varrho} \sum_r m_r n_r \bar{\mathbf{v}}_r,$$

der mittleren Massengeschwindigkeit, basieren^{13, 16}.

¹² W. KOHN u. J. M. LUTTINGER, Phys. Rev. **108**, 590 [1957]; **109**, 1892 [1958].

¹³ H. J. KAEPELER, Mitt. Forsch. Inst. Phys. Strahlenantriebe, Nr. 15, Stuttgart, März 1958.

¹⁴ H. J. KAEPELER, Über eine statistische Beschreibung vollionisierter Plasmen; Z. Naturforschg. **14a**, 1056 [1959].

¹⁵ H. GRAD, Handbuch der Physik (S. FLÜGGE), Bd. XII, S. 205, Springer Verlag, Berlin 1958.

¹⁶ I. I. KOLODNER, AEC Report NYO-7980, September 1957.

¹⁷ H. GRAD, Comm. Pure Appl. Math. **2**, 331 [1949].

* Der Index r , der die Komponente kennzeichnet, sei im folgenden weggelassen.

eingeführt. Damit entspricht $f^{(0)}$ der MAXWELL-Verteilung. Die Momente der Verteilung, basierend auf der Eigengeschwindigkeit V_i , sind definiert durch

$$M_{ij\dots}^{(v)}(\mathbf{r}, t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} \int V_i V_j \dots \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Diejenigen, basierend auf der Teilchengeschwindigkeit v_i , die sogenannten direkten Momente, sind

$$S_{ij\dots}^{(v)}(\mathbf{r}, t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} \int v_i v_j \dots \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Die hier interessierenden Momente sind im wesentlichen

a) das Moment nullter Ordnung, die Massendichte

$$M^{(0)} = \varrho = m \int \int \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}; \quad (12)$$

b) das Moment zweiter Ordnung, der Drucktensor

$$M_{ij}^{(2)} = P_{ij} = m \int \int V_i V_j \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}; \quad (13)$$

c) das verjüngte Moment dritter Ordnung, der Wärmestromvektor

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= 1, \quad a_i^{(1)} = 0, \quad a_{ij}^{(2)} = \frac{P_{ij}}{\varrho R T} - \delta_{ij} = \frac{p_{ij}}{p}, \quad a_{ijk}^{(3)} = \frac{Q_{ijk}}{\varrho (R T)^{3/2}}, \\ a_{ijkl} &= 0 = \frac{S_{ijkl}}{\varrho (R T)^2} - \frac{1}{\varrho R T} (P_{ij} \delta_{kl} + P_{ik} \delta_{jl} + P_{il} \delta_{jk} + P_{jk} \delta_{il} + P_{jl} \delta_{ik} + P_{kl} \delta_{ij}) + (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (18)$$

Abbrechen der Entwicklung mit dem 4. Glied ergibt dann für Gl. (4)

$$\tilde{f} = \tilde{f}^{(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{\varrho (R T)^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} p_{ij} V_i V_j + \left(\frac{V^2}{5 R T} - 1 \right) \sum_i q_i V_i \right] \right\}. \quad (19)$$

Die letzte der Gln. (18) wird zur Ermittlung von S_{ijkl} herangezogen. Im späteren Verlauf wird dieser Tensor jedoch durch seine Spur approximiert. Man hat somit

$$S_{jk} = \sum_i S_{ijki} = R T (7 P_{ik} - 2 p \delta_{jk}). \quad (20)$$

Die hier durchgeführte Entwicklung ist nur für den Fall eines Plasmas brauchbar, für den Einflüsse magnetischer Felder vernachlässigbar sind, d. h. es ist zu fordern, daß kein äußeres Magnetfeld vorhanden ist und die inneren Magnetfelder vernachlässigbar klein bleiben. Will man den Einfluß magneti-

$$\begin{aligned} \sum_i Q_{iji} &= 2 q_j = \sum_i m \int \int \int V_i V_j V_i \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ &= m \int \int \int V^2 V_j \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ijk} &= \frac{2}{5} (q_i \delta_{jk} + q_j \delta_{ik} + q_k \delta_{ij}) + q_{ijk}, \\ q_{ijk} &= 0, \quad \sum_i q_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Ferner werden noch benötigt

$$P_{ij} = p_{ij} + p \delta_{ij}, \quad (15)$$

$$\text{wobei } \frac{1}{3} \sum_i P_{ii} = p = \frac{m}{3} \int \int \int V^2 \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (16)$$

der hydrostatische Druck im Gleichgewicht ist. Die in Gl. (9) verwendete „Temperatur“ T (R = Gaskonstante = k/m) wird rein formal eingeführt durch die Zustandsgleichung

$$p/\varrho = R T; \quad p_r/\varrho_r = R T_r. \quad (17)$$

Die Beschränkung auf die obenstehenden Momente in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte ist als das GRADSche 13-Momenten-Verfahren bekannt. Unter Zuhilfenahme der Orthogonalitätsrelation (7) erhält man für die Koeffizienten der Entwicklung

scher Felder mit berücksichtigen, so ist die Entwicklung (19) durch eine erweiterte Entwicklung (4) zu ersetzen, die insbesondere Q_{ijk} an Stelle q_i enthält.

In den im folgenden durchgeführten Betrachtungen werden Einflüsse magnetischer Felder unberücksichtigt gelassen.

Die Momenten- und Bilanzgleichungen erhält man aus der BOLTZMANN-Gleichung mit Hilfe der Definition der individuellen spezifischen und der direkten Momente. Multipliziert man (1) mit dem Tensor $V_{ij\dots}^{(v)} = V_i V_j \dots$ und integriert über den Geschwindigkeitsraum, dann folgt die allgemeine Momentengleichung für die r -te Komponente des Plasmas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{r,ij\dots}^{(v)} + \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} M_{r,lij\dots}^{(v+1)} + \bar{v}_{r,l} \frac{\partial}{\partial x_l} M_{r,ij\dots}^{(v)} \right\} + \sum_{m \neq r} M_{r,i\dots} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_{r,m} \\ + \sum_l \left\{ M_{r,ij\dots}^{(v)} \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{v}_{r,l} + \sum_m M_{r,li\dots}^{(v)} \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{v}_{r,l} \right\} + \sum_l \sum_m M_{r,i\dots}^{(v-1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{v}_{r,m} \\ - \sum_l \frac{ze}{m_r} E_l \sum_m M_{r,i\dots}^{(v-1)} \delta_{lm} = \sum_s \int V_{ij\dots}^{(v)} A_{rs} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die allgemeine Bilanzgleichung erhält man durch Multiplikation von (1) mit dem Tensor $v_{ij}^{(v)}$ und Integration über den Geschwindigkeitsraum,

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{r,ij}^{(v)} + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} S_{r,lij}^{(v+1)} - \sum_l \frac{ze}{m_r} E_l \sum_{m \neq l} S_{r,ilm} = \sum_s \int v_{ij}^{(v)} A_{rs} dv. \quad (22)$$

Die Größen $\int V_{ij}^{(v)} A_{rs} dv_r$ und $\int v_{ij}^{(v)} A_{rs} dv_r$

bezeichnet man als Stoßintegrale. Die praktische Anwendung der Gln. (21) und (22) hängt davon ab, diese Integralausdrücke auf die Momente zurückzuführen. Einzelheiten hierüber sind in der Literatur zu finden^{13, 15-17}. Für den hier vorliegenden Fall der Ohmschen Heizung eines Plasmas sollen einige dieser Integrale im nachfolgenden Abschnitt gelöst werden. In Gl. (21) und (22) ist ferner

$$\sum_m a_{j,k} \dots b_{lm} = a_{jk} b_{il} + a_{ik} b_{jl} + a_{ij} b_{kl} + \dots$$

Damit ergeben sich die folgenden Momenten- und Bilanzgleichungen für ein Plasma ohne Magnetfeld:

a) die Kontinuitätsgleichung aus (21),

$$\frac{\partial \varrho_r}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\varrho_r \bar{v}_{r,l}) = 0, \quad (23)$$

b) die Bewegungsgleichung aus (22) zusammen mit (23),

$$\varrho_r \bar{v}_{r,i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_l \bar{v}_{r,l} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} P_{r,li} - n_r z e E_i = \sum_s m_r \int v_{ri} A_{rs} dv_r = \sum_s \mathfrak{R}_{rs}, \quad (24)$$

c) die Energiegleichung aus (22) zusammen mit (23) und (24)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{v}_{r,l} E_r) + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} q_{r,l} + \sum_{k,l} P_{r,lk} \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{v}_{r,l} &= \sum_s \sum_i \left\{ \frac{m_r}{2} \int v_{r,i}^2 A_{rs} dv_r - m_r \bar{v}_{r,i} \int v_{r,i} A_{rs} dv_r \right\} \\ &= \sum_s \left\{ j_{rs} - \sum_l \bar{v}_{r,l} \mathfrak{R}_{rs,l} \right\} \quad \text{mit} \quad E_r = \sum_i \frac{m_r}{2} \int V_{r,i}^2 f(r, v_r, t) dv_r = \frac{3}{2} n_r k T_r, \end{aligned}$$

d) die beiden Transportgleichungen aus (21)

1. für den Drucktensor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{rij}}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{v}_{r,l} P_{r,ij}) + \sum_l \left(P_{r,il} \frac{\partial \bar{v}_{r,j}}{\partial x_l} + P_{r,jl} \frac{\partial \bar{v}_{r,i}}{\partial x_l} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} q_{r,j} + \frac{\partial}{\partial x_j} q_{r,i} + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} q_{r,l} \delta_{ij} \right) \\ = \sum_s m_r \int V_{ri} V_{rj} A_{rs} dv_r. \end{aligned} \quad (26)$$

2. für den Wärmestromvektor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q_{r,i} + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{v}_{r,l} q_{r,i}) + \frac{2}{5} \sum_l \left\{ q_{r,i} \frac{\partial \bar{v}_{r,l}}{\partial x_l} + q_{r,l} \frac{\partial \bar{v}_{r,i}}{\partial x_l} \right\} + \frac{7}{5} \sum_l q_{r,l} \frac{\partial \bar{v}_{r,i}}{\partial x_l} + \frac{7}{2} \frac{k}{m_r} \sum_l \left\{ P_{r,il} \frac{\partial T_r}{\partial x_l} + T_r \frac{\partial}{\partial x_l} P_{r,li} \right\} \\ - \frac{k}{m_r} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_r T_r) + \sum_l \frac{P_{r,il} + E_r \delta_{il}}{n_r m_r} \left\{ \sum_s \mathfrak{R}_{rs,l} - \sum_a \frac{\partial}{\partial x_a} P_{r,al} \right\} = \sum_s \sum_j \frac{m_r}{2} \int V_j V_i V_j A_{rs} dv_r, \end{aligned} \quad (27)$$

wenn man die 13-Momenten-Approximation zugrunde legt. Eine Lösung dieses Gleichungssystems liefert dann die Wahrscheinlichkeitsdichte Gl. (19). Die Energiegleichung selbst ist schon in der Transportgleichung für den Drucktensor enthalten, so daß diese keine weitere Bestimmungsgleichung darstellt.

Für die im nachfolgenden durchgeführte Rechnung ist eine Umformung des Stoßintegrals von Interesse. Es existiert die Beziehung (siehe z. B. Anm. ¹¹)

$$\int \alpha_r A_{rs} dv_r = \int \int \int \int \alpha_r (\tilde{r}' \tilde{s}' - \tilde{r} \tilde{s}) g_{rs} b_{rs} db_{rs} d\varphi dv_r dv_s = \int \int \int \int (\alpha_r' - \alpha_r) \tilde{r} \tilde{s} g_{rs} b_{rs} db_{rs} d\varphi dv_r dv_s,$$

wobei α_r eine beliebige Größe vor dem Stoß, α_r' dieselbe nach dem Stoß ist.

II. Vereinfachtes Modell der Ohmschen Heizung eines vollionisierten Plasmas

Für die weitere Betrachtung der OHMSchen Heizung eines Plasmas soll die im Vorangegangenen diskutierte 13-Momenten-Approximation, die im allgemeinsten Fall bei zwei-komponentigen Gas-mischungen auf die Quadratur von 2×3328 Integralen und die Lösung eines Systems von 2×13 gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen führt, in der Weise vereinfacht werden, daß die Anisotropie des Drucktensors und der Wärmestromvektor für jede Komponente vernachlässigt wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichten reduzieren sich dadurch auf lokale MAXWELL-Verteilungen:

$$\bar{f}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r, t) = n_r(\mathbf{r}, t) \left(\frac{m_r}{2\pi k T_r} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_r(\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}_r)^2}{2k T_r} \right\}, \quad (28)$$

wobei $T_r = T_r(\mathbf{r}, t)$ und $\bar{\mathbf{v}}_r = \bar{\mathbf{v}}_r(\mathbf{r}, t)$ ist.

Weiterhin soll für die OHMSche Heizung hier zunächst der ortsunabhängige instationäre Fall betrachtet, der Einfluß des Magnetfeldes vernachlässigt¹⁹ und von Instabilitäten abgesehen werden. Die Einflüsse des Magnetfeldes mögen einer späteren Betrachtung vorbehalten bleiben. Tatsächlich schließt die Annahme der Ortsunabhängigkeit das Verschwinden des Wärmestromvektors und des anisotropen Anteils des Drucktensors näherungsweise mit ein²⁰, wenn die relativen Änderungen der makroskopischen Eigenschaften, wie $\Delta T/T$, $\Delta \mathbf{v}/v$ usw., innerhalb der mittleren Stoßzeit klein gegen eins sind. Unter diesen Voraussetzungen lauten die interessierenden Gleichungen:

$$n_e = z n_i = \text{const} \quad (\text{s. Anm. } *), \quad (29)$$

$$q_i \frac{d\bar{\mathbf{v}}_i}{dt} - n_i z e \mathfrak{E} = \sum_{e,i} m_i \int \mathbf{v}_i A_{ie} d\mathbf{v}_i \equiv \sum_{e,i} \mathfrak{R}_{ie}, \quad (30 a)$$

$$q_e \frac{d\bar{\mathbf{v}}_e}{dt} + n_e e \mathfrak{E} = \sum_{e,i} m_e \int \mathbf{v}_e A_{ei} d\mathbf{v}_e \equiv \sum_{e,i} \mathfrak{R}_{ei}, \quad (30 b)$$

$$\frac{3}{2} n_i k \frac{dT_i}{dt} = \sum_{e,i} \left\{ \frac{m_i}{2} \int v_i^2 A_{ie} d\mathbf{v}_i - v_i \mathfrak{R}_{ie} \right\}, \quad (31 a)$$

$$\frac{3}{2} n_e k \frac{dT_e}{dt} + \frac{2}{3k} S = \sum_{e,i} \left\{ \frac{m_e}{2} \int v_e^2 A_{ei} d\mathbf{v}_e - \bar{v}_e \mathfrak{R}_{ei} \right\} \quad (31 b)$$

Dabei ist die letzte Gleichung insofern erweitert, als sie die Energieverluste der Elektronen durch Strahlung mitberücksichtigt^{20*}. Konsequenterweise müßte in einer Mehrkomponententheorie das Photongas als zusätzliche Komponente betrachtet werden. Außerdem müßten wir bei den Stoßintegralen auch solche für inelastische Elektron-Ion-Stöße berücksichtigen, was die Rechnung weiterhin erschwert. Im Falle eines voll-ionisierten Plasmas beschränken sich die nichtelastischen Stöße auf die Prozesse der Strahlungsemission. Doch läßt sich näherungsweise der Gesamtstrahlungsverlust den sehr viel leichteren Elektronen zuschreiben. Wie gezeigt werden kann, ist für nichtrelativistische Teilchen ein frei-frei-Stoß in bezug auf den Impulsaustausch hinreichend elastisch. Bei dem hier betrachteten Fall nicht zu dichter und ausgedehnter Plasmen kann die Strahlungsabsorption vernachlässigt werden.

Sind die Stoßintegrale als Funktionen der Dichten, Temperaturen und mittleren Geschwindigkeiten bekannt, so beschreibt unser vereinfachtes Gleichungssystem bei vorgegebenem $\mathfrak{E}(t)$ für ein ortsunabhängiges Problem den zeitlichen Verlauf der mittleren Geschwindigkeit und der Temperatur sowohl des Elektronen- wie Ionengases unter Voraussetzung von kleinen relativen Änderungen der makroskopischen Eigenschaften wie $\Delta T/T$; $\Delta \mathbf{v}/v$ usw. Inwiefern letzteres erfüllt wird, muß von Fall zu Fall abgeschätzt werden.

III. Berechnung der Stoßintegrale

A. Stoßintegral für den Impulstransport

Die Stoßintegrale in den Bewegungsgleichungen haben die Dimension einer Kraftdichte. Sie stellen die von einer Komponente auf die andere Komponente durch Stöße (intermolekulare Wechselwirkung) übertragenen Bewegungsgrößen pro Zeit- und Volumeneinheit dar und werden allgemein als Reibungskräfte bzw. Diffusionskräfte bezeichnet^{7, 8}.

¹⁸ H. GRAD, Comm. Pure Appl. Math. **2**, 325 [1949].

¹⁹ Wie L. SPITZER, JR. (s. Anm. ³) bemerkte, ist die Vernachlässigung des Einflusses des Magnetfeldes auf die OHMSche Heizung in erster Näherung erlaubt.

²⁰ J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTIS u. R. B. BIRD, Molecular

Theory of Gases and Liquids, Wiley & Sons, New York 1954, S. 495.

* Auf Grund der Kontinuitätsgleichung ist $n_e = \text{const}$, $n_i = \text{const}$ die Ortsunabhängigkeit fordert jedoch auch $\text{div } \mathfrak{E} = 4\pi e(z n_i - n_e) = 0$ (Quasineutralität).

^{20*} J. O. HIRSCHFELDER, l. c. ²⁰, S. 720 ff.

In unserem vereinfachten Fall mit zwei Komponenten, für die wir je eine lokale MAXWELL-Verteilung annehmen, brauchen wir nur Elektron-Ion-Stöße zu betrachten, weil zwischen Teilchen von derselben Komponente im Mittel keine Impulsübertragung stattfinden kann. In der nachfolgenden Darstellung beschränken wir uns darauf, die Elektronen und die Ionen als jeweils eine Komponente mit einer Normalverteilung zu betrachten. Damit bleiben Anomalien in der Verteilung (Gruppendarstellung einer Teilchensorte) unberücksichtigt.

Die Reibungskraftdichte, welche, herrührend von den Ionen, auf die Elektronen wirkt, ist gegeben durch das Stoßintegral

$$\mathfrak{R}_{ei} = m_e \int v_e A_{ei} dv_e \\ = \iiint m_e (v_e' - v_e) \bar{f}_e^{(0)} \bar{f}_i^{(0)} g_{ei} b_{ei} db_{ei} d\varphi dv_i dv_e.$$

Hierin bedeutet $m_e(v_e' - v_e)$ die Impulsänderung des Elektrons bei einem beliebigen Stoß mit einem Ion. Ist ϵ der Einheitsvektor der Stoßnormalen, so berechnet sich die Impulsänderung in Richtung ϵ (s. Abb. 1), wenn $v_e^{*'}$ und v_e^* die Geschwindig-

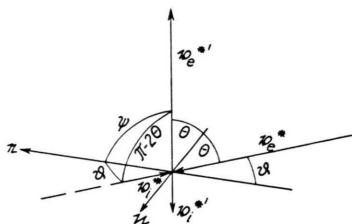


Abb. 1. Vektordiagramm eines Elektron-Ion-Stoßes im Schwerpunktsystem der Stoßpartner.

keiten des Elektrons im Schwerpunktsystem der Stoßpartner nach und vor dem Stoß darstellen zu:

$$m_e(v_e' - v_e) \epsilon = m_e(v_e^{*'} - v_e^*) \epsilon \\ = m_e(|v_e^{*'}| \cos \psi - |v_e^*| \cos \vartheta).$$

Dies ist nach Abb. 1 bei Voraussetzung elastischer Streuung gleich

$$-m_{ei} |v_e^*| \cos \vartheta (1 + \cos 2 \Theta) \\ + m_e |v_e^*| \sin \vartheta \sin 2 \Theta \cos \varphi.$$

Für die Reibungskraft in ϵ -Richtung folgt nach Integration über φ von 0 bis 2π :

$$\mathfrak{R}_{ei} \cdot \epsilon = -2\pi \iint m_e |v_e^*| \cos \vartheta (1 + \cos 2 \Theta) \\ \cdot \bar{f}_e^{(0)} \bar{f}_i^{(0)} g_{ei} b_{ei} db_{ei} dv_i dv_e$$

oder, wenn wir v_e^* durch $\frac{m_i}{m_e + m_i} (v_e - v_i)$ ersetzen,

$$\mathfrak{R}_{ei} = 2\pi \iint m_{ei} (v_i - v_e) \bar{f}_e^{(0)} \bar{f}_i^{(0)} A_{ei} dv_i dv_e, \quad (32)$$

$$\text{mit} \quad m_{ei} = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \quad (33)$$

$$\text{und} \quad A_{ei} = g_{ei} \int (1 + \cos 2 \Theta) b_{ei} db_{ei}.$$

Die Größe A_{ei} , welche eine Funktion des Betrages der Relativgeschwindigkeit g_{ei} ist, läßt sich für COULOMB-Wechselwirkung zwischen den Teilchen analytisch streng nicht angeben. Das Integral divergiert für ein reines r^{-1} -Potential. Um trotzdem mittels einer Zweierstoßrechnung vernünftige Näherungslösungen zu erhalten, sind verschiedene Vorschläge gemacht worden^{21, 22, 23}; vgl. auch Anm.¹¹, S. 178. Dabei wird entweder der Stoßparameter für das reine COULOMB-Feld in einem bestimmten endlichen Abstand abgeschnitten, oder es wird bis zu einem endlichen Stoßparameter mit einem ungestörten COULOMB-Feld gerechnet und für größere Stoßparameter ein abgeschirmtes Feld (z. B. aus der DEBYE-HÜCKEL-Theorie) zugrunde gelegt. Wie LIBOFF²¹ zeigt, ist der Unterschied zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Methoden für Plasmen mit nicht zu hoher Ladungsträgerdichte klein. Berechnen wir A_{ei} für Stöße zwischen Elektronen und Z-fach geladenen Ionen nach CHAPMAN und COWLING, indem nur bis zu einem endlichen Stoßparameter b_0 integriert wird, so folgt

$$A_{ei} = \gamma \left(\frac{z e^2}{m_{ei}} \right)^2 \frac{1}{g_{ei}^3} \quad (34)$$

$$\text{mit} \quad \gamma = \ln \left(1 + \left[b_0 \frac{m_{ei}}{z e^2} g_{ei}^2 \right]^2 \right). \quad (35)$$

Für b_0 setzen wir den von SPITZER und HÄRM vorgeschlagenen DEBYE-Radius

$$b_0 = d_0 = \sqrt{\frac{k T_e}{4 \pi n_e e^2 (1 + z)}}. \quad (36)$$

Die Quadratur des Stoßintegrals führen wir in der Weise aus, daß wir das \ln -Glied mit seinem geringen Einfluß vor das Integral ziehen und g_{ei}^2 durch

²¹ R. L. LIBOFF, AEC Bericht NYO-8669, Institute of Mathematical Sciences, New York 1957.

²² R. S. COHEN, L. SPITZER JR. u. P. MCROUTLY, Phys. Rev. **80**, 230 [1950].

²³ S. SPITZER JR. u. R. HÄRM, Phys. Rev. **89**, 977 [1953].

das mittlere Quadrat der Relativgeschwindigkeit

$$\overline{g_{ei}^2} = \iint g_{ei}^2 \hat{f}_e^{(0)} \hat{f}_i^{(0)} dv_e dv_i \quad (37)$$

$$= \bar{g}_{ei}^2 + 3k \left(\frac{T_e}{m_e} + \frac{T_i}{m_i} \right)$$

ersetzen.

Nach Anhang I erhalten wir:

$$\Re_{ei} = -2\pi \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} a^{3/2} n_e n_i \gamma \frac{1}{\kappa^3} \cdot \left\{ \Phi(\kappa) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \kappa e^{-\kappa^2} \right\} \bar{g}_{ei}. \quad (38)$$

Hierin bedeuten

$$a = \frac{1}{2k} \frac{m_e m_i}{m_e T_i + m_i T_e}, \quad (39)$$

$$\kappa = \sqrt{a} |\bar{g}_{ei}|, \quad (40)$$

$$\gamma = \ln \left\{ 1 + \frac{9}{4\pi} \frac{k^3 T_e^3}{n_e e^6 z^2 (z+1)} (1 + \frac{2}{3} \kappa^2)^2 \right\}, \quad (41)$$

$\Phi(\kappa)$ = GAUSS'sches Fehlerintegral.

In Abb. 2 ist der Betrag der Reibungskraft bezogen auf $n_e n_i z^2$ als Funktion der Diffusionsge-

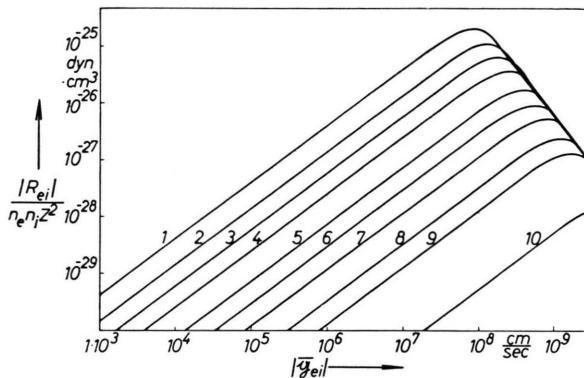


Abb. 2. Reibungskraft bezogen auf $n_e n_i z^2$ als Funktion der Diffusionsgeschwindigkeit $|g_{ei}|$ bei verschiedenen Elektronentemperaturen T_e .

Kurve Nr.	1	2	3	4	5
Parameter T_e in °K	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
Kurve Nr.	9	7	8	9	10
Parameter T_e in °K	10^6	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	10^7	10^8

schwindigkeit und Elektronentemperatur aufgetragen. Die Abhängigkeit von der Ionentemperatur ist vernachlässigbar klein, solange sie nicht merklich größer wird als die Elektronentemperatur ($T_i \gtrsim 10 T_e$).

Die dimensionslose Größe κ ist ein Maß für das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeit zur ther-

mischen Geschwindigkeit. Ist $\kappa \ll 1$, dann kann κ im ln-Glied vernachlässigt werden, und es gilt näherungsweise,

$$\frac{1}{\kappa^3} \left\{ \Phi(\kappa) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \kappa e^{-\kappa^2} \right\} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}}. \quad (42)$$

Damit ist die Reibungskraft proportional zur Diffusionsgeschwindigkeit g_{ei} und abgesehen von $\gamma(T_e)$ umgekehrt proportional zu $T_e^{3/2}$, wie es auch die Diffusionstheorie zeigt. Bemerkenswert ist jedoch die Tatsache, daß die Reibungskraft bei $\kappa = 1$ ein Maximum durchläuft und für größere κ proportional $\frac{g_{ei}}{|g_{ei}|^3}$ abfällt. Eine Temperaturabhängigkeit ist nur noch durch den Faktor γ gegeben.

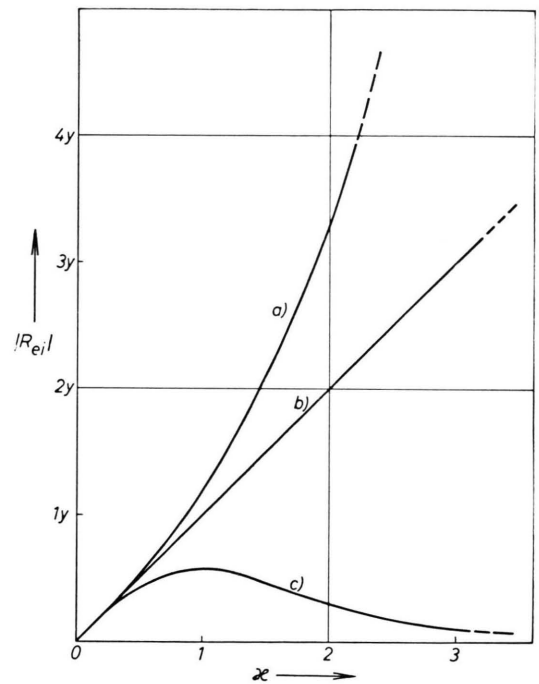


Abb. 3.

Um den Einfluß verschiedener Kraftgesetze für die intermolekulare Wechselwirkung auf die Reibungskraft zu veranschaulichen, sollen die Stoßintegrale für MAXWELL-Moleküle und für starr-elastische kugelförmige Teilchen vom Querschnitt Q_{rs} mit dem für COULOMB-Teilchen verglichen werden.

Für MAXWELL-Moleküle mit einem Wechselwirkungspotential r^{-4} (r = intermolekularer Abstand) wird das Integral für die Reibungskraft besonders einfach, weil A_{rs} von g_{rs} unabhängig ist. Die Reibungskraft berechnet sich, wenn μ_{rs} eine Potentialkonstante darstellt, zu:

$$\mathfrak{R}_{rs}^{\text{MAXWELL}} = m_{rs} \mu_{rs} \int \int (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_r) \tilde{\mathbf{f}}_r \tilde{\mathbf{f}}_s d\mathbf{v}_r d\mathbf{v}_s = -n_r n_s m_{rs} \mu_{rs} \tilde{\mathbf{g}}_{rs}. \quad (43)$$

Die Reibungskraft ist hier durchweg proportional zur Diffusionsgeschwindigkeit.

Im Falle starr-elastischer Kugelsphären ist \mathcal{A}_{rs} proportional \mathbf{g}_{rs} , und zwar ist $\mathcal{A}_{rs} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{g}_{rs} \cdot \mathbf{Q}_{rs}$, so daß sich die Reibungskraft zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{rs}^{\text{starr}} &= m_{rs} Q_{rs} \int \int (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_r) \mathbf{g}_{rs} \tilde{\mathbf{f}}_r^{(0)} \tilde{\mathbf{f}}_s^{(0)} d\mathbf{v}_r d\mathbf{v}_s \\ &= -n_r n_s m_{rs} Q_{rs} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{rs}}{\kappa^3} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\kappa + 2\kappa^3) e^{-\kappa^2} - (1 - 4\kappa^2 - 4\kappa^4) \Phi(\kappa) \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

berechnet (s. Anhang I).

Für kleine κ läßt sich die geschweifte Klammer entwickeln. In erster Näherung erhalten wir auch für starre Kugelsphären die Reibungskraft proportional zur Diffusionsgeschwindigkeit $\tilde{\mathbf{g}}_{rs}$, nämlich

$$\mathfrak{R}_{rs}^{\text{starr}} \approx \frac{-8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi} a} m_{rs} n_r n_s Q_{rs} \tilde{\mathbf{g}}_{rs}.$$

In Abb. 3 sind die Beträge der Reibungskräfte als Funktion von κ dargestellt für a) starre Kugeln, b) MAXWELL-Moleküle und c) COULOMB-Teilchen. Dabei sind Q_{rs} und μ_{rs} so gewählt, daß

$$\begin{aligned} y &\equiv n_r n_s m_{rs} \frac{\mu_{rs}}{\sqrt{a}} \\ &= n_r n_s m_{rs} \frac{Q_{rs}}{a} \cdot \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = n_e n_i \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} \gamma a \frac{8}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{3} \end{aligned} \quad (45)$$

ist. Abgesehen vom Faktor γ , dessen κ -Abhängigkeit nur unwesentlich ist, ist die Größe y von der Diffusionsgeschwindigkeit $|\tilde{\mathbf{g}}_{ei}|$ unabhängig. Solange $\kappa < \frac{1}{5}$, d. h. die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen noch wesentlich größer als die Diffusionsgeschwindigkeit ($\tilde{\mathbf{g}}_{ei}$) ist, unterscheiden sich die Kurven a), b), c) nur um weniger als 3%. Im Bereich $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{5}$ können wir näherungsweise die Elektronen und Ionen entweder als MAXWELL-Moleküle oder starre Kugeln ansehen, wobei der Faktor μ_{rs} bzw. ein mittlerer Querschnitt Q_{rs} (GVSDOVER-

Querschnitt) aus Gl. (45) folgt,

$$\mu_{ei} = \frac{8}{3} \sqrt{\pi} a^{3/2} \gamma \left(\frac{z e^2}{m_{ei}} \right)^2 \quad (46)$$

$$Q_{ei}^{\text{GVSDOVER}} = \left(\frac{z e^2}{m_{ei}} a \right)^2 \pi \gamma. \quad (47)$$

Für große κ kann ebenfalls ein solcher mittlerer Stoßquerschnitt definiert werden. Durch Gleichsetzen von (38) und (44) folgt der effektive Querschnitt für Elektron-Ion-Stoß bei gegenseitiger Durchdringung der Komponenten zu

$$\begin{aligned} Q_{ei}^{\text{eff}} &= Q_{ei}^{\text{GVSDOVER}} \\ &\cdot \frac{8 \left\{ \Phi(\kappa) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \kappa e^{-\kappa^2} \right\}}{(4\kappa^4 + 4\kappa^2 - 1) \Phi(\kappa) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\kappa + 2\kappa^3) e^{-\kappa^2}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Für sehr große κ geht der effektive Querschnitt über in

$$Q_{ei}^{\text{eff}} \approx Q_{ei}^{\text{GVSDOVER}} \frac{2}{\kappa^4} = 2 \pi \gamma \frac{z^2 e^4}{m_{ei}^2 \tilde{g}_{ei}^4}.$$

B. Stoßintegral für den Energieaustausch

Die Stoßintegrale, welche den Energieaustausch zwischen den Komponenten e und i wiedergeben, lauten:

$$1. \text{ für die Ionen: } j_{ie} = \iiint \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}_i'^2 - \mathbf{v}_i^2) \tilde{\mathbf{f}}_i^{(0)} \tilde{\mathbf{f}}_e^{(0)} \mathbf{g}_{ie} b_{ie} db_{ie} d\varphi d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}_i, \quad (49a)$$

$$2. \text{ für die Elektronen: } j_{ei} = \iiint \frac{m_e}{2} (\mathbf{v}_e'^2 - \mathbf{v}_e^2) \tilde{\mathbf{f}}_e^{(0)} \tilde{\mathbf{f}}_i^{(0)} \mathbf{g}_{ie} b_{ie} db_{ie} d\varphi d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_e. \quad (49b)$$

Entsprechend wie unter A ist eine Stoßbetrachtung zwischen Teilchen, die derselben Verteilung angehören, nicht notwendig, weil im Mittel daraus keine Energieübertragung resultiert. Zur Berechnung von

$$\mathcal{A}_i = \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}_i'^2 - \mathbf{v}_i^2) \text{ und } \mathcal{A}_e = \frac{m_e}{2} (\mathbf{v}_e'^2 - \mathbf{v}_e^2)$$

spalten wir die Geschwindigkeiten wiederum auf in eine Schwerpunktschwindigkeit \mathbf{v}_s und in die entsprechenden Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem beider Stoßpartner (s. Abb. 4). Es folgt

$$\mathcal{A}_e = m_e (\mathbf{v}_e^{*'} - \mathbf{v}_e^{*}) \cdot \mathbf{v}_s.$$

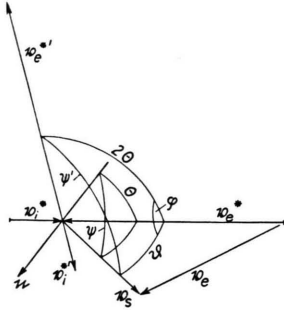


Abb. 4. Winkelverteilung beim Elektron-Ion-Stoß.

Aus der Geometrie der Stoßkonfiguration erhält man

$$v_e^{*'} = v_e^* - 2(v_e^* \cdot n) n = v_e^* - 2 \frac{m_i}{m_e + m_i} (g_{ei} \cdot n) n, \quad (50)$$

$$\Delta_e = -2 m_{ei} (g_{ei} \cdot n) (n \cdot v_s) = 2 m_{ei} g_{ei} |v_s| \cos \Theta \cos \psi,$$

wobei n den Einheitsvektor der Stoßnormalen darstellt.

In dieser Form ist der Integrand für die Quadrat ungeeignet, weil sowohl $|v_s|$ als auch $\cos \psi$, durch die Geschwindigkeiten v_e und v_i ausgedrückt, einen komplizierten Ausdruck liefern. Δ_e und Δ_i lassen sich außerdem darstellen durch

$$\Delta_e = \frac{m_e}{2} (v_e^{*'}^2 + v_s^2 - v_e^2 + 2 v_e^{*'} \cdot v_s),$$

$$\Delta_i = \frac{m_i}{2} (v_i^{*'}^2 + v_s^2 - v_i^2 + 2 v_i^{*'} \cdot v_s).$$

Unter Voraussetzung elastischer Streuung ist

$$\Delta_e + \Delta_i = 0,$$

so daß das Quadrat der Schwerpunktschwindigkeit v_s folgt zu:

$$v_s^2 = \frac{m_e}{m_e + m_i} (v_e^2 - v_e^{*2}) + \frac{m_i}{m_e + m_i} (v_i^2 - v_i^{*2}).$$

Eingesetzt in die Gleichung für Δ_e ergibt (s. Abb. 4)

$$\begin{aligned} \Delta_e &= \frac{m_{ei}}{2} \{ v_e^{*2} - v_i^{*2} - (v_e^2 - v_i^2) \} + m_e v_e^{*'} \cdot v_s \\ &= \frac{m_{ei}}{2} \left\{ \frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} g_{ei}^2 - (v_e^2 - v_i^2) \right\} \\ &\quad + m_{ei} g_{ei} |v_s| \cos \psi'. \end{aligned} \quad (51)$$

Ersetzen wir in Gl. (50) $\cos \psi$ durch die goniometrische Beziehung

$$\cos \psi = \cos \Theta \cos \vartheta + \sin \Theta \sin \vartheta \cos \varphi,$$

in Gl. (51) $\cos \psi'$ durch die entsprechende Beziehung

$$\cos \psi' = (2 \cos^2 \Theta - 1) \cos \vartheta + \sin 2 \Theta \sin \vartheta \cos \varphi$$

und multiplizieren wir Gl. (50) mit $(1 - 2 \cos^2 \Theta)$, so folgt durch Addition beider Gleichungen der Ausdruck für $\Delta_e / 2 \cos^2 \Theta$. Nach Δ_e aufgelöst, ergibt

$$\begin{aligned} \Delta_e &= \frac{m_{ei}}{2} \left\{ \frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} g_{ei}^2 - (v_e^2 - v_i^2) \right\} (1 + \cos 2 \Theta) \\ &\quad + m_{ei} g_{ei} |v_s| \sin \vartheta \sin 2 \Theta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Diese Umformungen bezwecken, daß einerseits der Integrand Δ_e nur Größen enthält, die direkt durch die Stoßvariablen φ , Θ , ϑ , v_e und v_i bzw. g_{ei} gegeben sind, und daß andererseits die ϑ -Abhängigkeit herausfällt. Das noch unbekannte 2. Glied mit $|v_s| \sin \vartheta$ verschwindet bei der Integration über φ von 0 bis 2π . Damit lautet das Stoßintegral

$$j_{ei} = \pi m_{ei} \int \int \left\{ \frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} g_{ei}^2 - (v_e^2 - v_i^2) \right\} \Delta_{ei} f_e^{(0)} f_i^{(0)} dv_i dv_e. \quad (52)$$

Nach Anhang II folgt

$$j_{ei} = 2\pi \sqrt{a} \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} n_e n_i \gamma \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\kappa^2} \cdot a_e - \frac{1}{\kappa} \Phi(\kappa) \frac{m_e}{m_e + m_i} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\kappa^2} - \frac{\Phi(\kappa)}{\kappa} \right) a \frac{v_i \cdot g_{ei}}{\kappa^2} \right\}. \quad (53)$$

Zusammen mit Gl. (38) erhält man für den in der Energiegleichung auftretenden Ausdruck,

$$j_{ei} - \bar{v}_e \Re_{ei} = 2\pi \sqrt{a} \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} n_e n_i \gamma \left\{ \frac{1}{\kappa} \Phi(\kappa) \frac{m_i}{m_e + m_i} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_i e^{-\kappa^2} \right\}, \quad (54)$$

$$a_e = \frac{m_e T_i}{m_e T_i + m_i T_e}; \quad a_i = \frac{m_i T_e}{m_e T_i + m_i T_e}. \quad (55 \text{ a, b})$$

Eine Formel für kleine κ ($\kappa \leq \frac{1}{2}$) erhält man daraus, wenn man die geschweifte Klammer entwickelt und mit κ^2 abbricht:

$$j_{ei} - \bar{v}_e \cdot \Re_{ei} \approx 4\sqrt{\pi a} z^2 e^4 n_e n_i \frac{\gamma}{m_e T_i + m_i T_e} \left\{ (T_i - T_e) \left(1 - \frac{\kappa^2}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \right) T_e \cdot \kappa^2 \right\}. \quad (56)$$

Durch Vertauschen der Indizes e und i erhält man den entsprechenden Ausdruck für die Ionen.

IV. Diskussion der Ergebnisse

Im Vorliegenden wurden unter den Annahmen

- a) Vernachlässigung des Einflusses eines Magnetfeldes,
- b) Vernachlässigung der Anisotropie des Drucktensors,
- c) Vernachlässigung des Wärmestromvektors,
- d) Kanalmodell mit z -Strom,

ein System von Gleichungen zur praktischen Berechnung der OHMSCHEN Heizung eines vollionisierten Plasmas abgeleitet. Dieses System ist in den Gln. (30 a, b) und (31 a, b) angegeben. Die zugehörigen Stoßintegrale wurden berechnet und in Gl. (38) mit den Gln. (39) bis (41), sowie Gl. (54) mit den Gln. (55 a, b) angegeben.

Die Vernachlässigung des Wärmestromvektors und der Anisotropie des Drucktensors liefert eine lokale MAXWELL-Verteilung. Damit beschränkt man sich in der Beschreibung des Plasmaverhaltens auf die niederen Momente, also insbesondere auf die Variablen ϱ , v , T , so daß man zunächst die Überlegenheit des Momentenverfahrens gegenüber der ENSKOGSchen Methode aufgibt. Jedoch scheint es ohne besondere Schwierigkeiten möglich, die höheren Momente mit in die Rechnung einzubeziehen. Es sind dann die Gln. (23) bis (27) zu verwenden, wobei nun aber weitere Glieder der Stoßintegrale auftauchen, die hier nicht berechnet sind. Diese Glieder entstehen durch den 2. und 3. Term für die Wahrscheinlichkeitsdichte [Gl. (19)]. Bei der durchzuführenden Integration können die von v und t abhängigen Momente vor das Integral gezogen werden, so daß im Integrand nur noch bekannte Funktionen der Geschwindigkeit stehen.

Will man Annahme d) fallen lassen und andere Modelle behandeln, z. B. die OHMSCHHE Heizung infolge der Abbremsung induzierter Wirbelströme beim Θ -Pinch mit endlicher Leitfähigkeit, dann muß zuvor eine Berücksichtigung des Einflusses des Magnetfeldes durchgeführt werden, also Annahme a) beseitigt werden. Die Möglichkeiten hierzu scheinen durch das Momentenverfahren gegeben zu sein.

Es ist ferner noch zu berücksichtigen, daß durch die Verwendung der BOLTZMANN-Gleichung mit den hier angegebenen Stoßintegralen eine Beschränkung auf Zweierstöße erfolgt ist. Die kumulative Wechselwirkung im Plasma ist damit vernachlässigt und die hier berechnete Reibungskraft ist zu gering. Eine näherungsweise Erfassung dieser Effekte könnte die

Anfügung von FOKKER-PLANCK-Termen zu den Stoßintegralen ergeben, so wie dies etwa von SPITZER und Mitarbeitern^{22, 23} oder von GRAD²⁴ durchgeführt wurde. Eine Abschätzung läßt sich hier dadurch angeben, daß man die elektrische Leitfähigkeit nach CHAPMAN-COWLING (Zweierstöße) und diejenige von SPITZER vergleicht, wie dies in einer Tabelle bei SPITZER erfolgt ist. Für den Extremfall geringer Dichte und sehr hoher Temperatur ist die SPITZERSche Leitfähigkeit etwa 60% derjenigen von COWLING. Jedoch ist hier zu beachten, daß bei letzterer nicht der DEBYE-Radius als maximaler Stoßparameter gewählt wurde, wie dies von SPITZER wie auch von uns durchgeführt wurde. Es ist zu vermuten, wie aus den Ausführungen bei SPITZER²³ hervorgeht, daß unsere Ergebnisse näher bei denen von SPITZER liegen.

Ein weiterer Umstand ist an dieser Stelle noch zu diskutieren. Die hier angewandte Art der Beschreibung hat trotz der ursprünglich kinetischen Betrachtungsweise einen makroskopischen Charakter. Dies rührt daher, daß im Endeffekt eine Darstellung des Plasmaverhaltens ausschließlich durch über die Verteilung gebildete Mittelwerte erfolgt. Die Verteilung selbst mag, obwohl sie im mittleren Bereich im wesentlichen eine MAXWELLSche ist, einen starken nicht-MAXWELLSchen Schwanz haben. Ein solches Anheben des Schwanzes einer Verteilung kann z. B. durch relativ starke elektrische Felder erfolgen. Da die Reibungskraft als Mittelwert, d. h. als Integrand über die Verteilung gegeben ist, wird sie wesentlich durch den mittleren Bereich der Verteilung bestimmt und der von einer MAXWELLSchen Verteilung stark abweichende Schwanz ist von geringem Einfluß. Man sieht somit, daß die hier erfolgte Beschreibung durch Mittelwerte einerseits gerechtfertigt ist, wenn man sich im wesentlichen für eine phänomenologische Darstellung interessiert. Andererseits unterdrückt man eine Reihe von Informationen, insbesondere diejenigen über den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte. Eine Diskussion hierüber findet man in der genannten Arbeit von GRAD²⁴.

Eine wesentliche Rolle kann ein solcher nicht-MAXWELLScher Verteilungsschwanz bei der Betrachtung des „Runaway“-Effekts haben. Es ist hier empfehlenswert, zwischen dem Runaway-Effekt für Einzelteilchen und dem kumulativen Runaway-Effekt zu unterscheiden. Der Faktor A_{ei}/g_{ei} aus Gl. (33) kann

²⁴ H. GRAD, AEC Report NYO-7977, Institute of Math. Sciences, New York University, New York, Jan. 1958.

als Maß für die Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem Ion angesehen werden. Dieser Faktor ist proportional g_{ei}^{-4} , nimmt also sehr stark mit wachsender Relativgeschwindigkeit ab. Dies bedeutet, daß schnelle Elektronen nur noch unwesentlich am Impulsaustausch mit den Ionen teilnehmen, sie „laufen davon“ (Runaway-Effekt für Einzelteilchen). Der Anteil der Runaway-Elektronen hängt somit stark von dem Verlauf des Schwanzes der Verteilung ab. Da diese Runaway-Elektronen einen Teil des elektrischen Stromes führen, der nicht mehr der OHMSchen Heizung zugute kommt, wird das Auftreten von solchen Runaway-Elektronen die aus der Beziehung $\sigma = I/E \cdot F$ bei gemessenem Strom I , gemessener Feldstärke E und gemessenem Entladungsquerschnitt F ermittelte elektrische Leitfähigkeit σ verfälschen.

Der kumulative Runaway-Effekt kann aus dem Vorgenannten verstanden werden. Er tritt dann auf, wenn die Reibungskraft so weit abgenommen hat, daß man bereits von einem Weglaufen der Elektronen im Mittel sprechen kann. Eine solche Betrachtung des Runaway-Effekts hat DREICER²⁵ unter Vernachlässigung der Ionenbewegung durchgeführt. Er bringt u. a. eine Näherungsformel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach einer gewissen Zeit die Gesamtheit der Elektronen ins Runaway-Gebiet gelangt sind. Der Übergang der Elektronenkomponente ins Runaway-Gebiet läßt sich mit Hilfe von Abb. 3 veranschaulichen. Hier ist die Reibungskraft als Funktion einer Variablen

$$z = \sqrt{\frac{1}{2k} \frac{m_e m_i}{m_e T_i + m_i T_e}} \cdot |\bar{g}_{ei}|,$$

also einer auf die mittlere thermische Geschwindigkeit bezogenen Diffusionsgeschwindigkeit, angege-

ben. Die Reibungskraft steigt bis zu einem Wert $z=1$, d. h. bis die Diffusionsgeschwindigkeit so groß wie die mittlere thermische Geschwindigkeit ist, um darüber hinaus mit wachsendem z abzunehmen. Es ist nun

$$\bar{g}_{ei} = \bar{v}_e - \bar{v}_i \quad (\text{siehe Anhang I}).$$

Für \bar{v}_e und \bar{v}_i gelten die Bewegungsgleichungen (30 a, b), in denen die elektrische Feldstärke \mathcal{E} als wesentliche Größe auftritt. Aus diesen Gleichungen, zusammen mit Abb. 3, sieht man, daß für

$$\mathcal{E} < \mathcal{R}_{ei, \max}/e n_e$$

die einzelnen Komponenten nur solange beschleunigt werden, bis die mit der Diffusionsgeschwindigkeit ansteigende Reibungskraft der aus dem elektrischen Feld herrührenden Kraft die Waage hält. Für

$$\mathcal{E} > \mathcal{R}_{ei, \max}/e n_e \approx \gamma n_i \frac{z^2 e^3}{k T_e} \approx 10^{-9} \frac{z^2 n_i}{T_e} \left[\frac{\text{Volt}}{\text{cm}} \right]$$

wird die Feldkraft immer größer bleiben als die Reibungskraft und die Elektronen und Ionen werden dauernd beschleunigt. Man ersieht also daraus, daß für eine wirkungsvolle OHMSche Heizung nur der Bereich

$$z \leq 1; \quad \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_{ei, \max}/e n_e$$

interessant ist. Hieraus lassen sich die elektrischen Feldstärken für die jeweiligen Fälle angeben.

Zu beachten ist noch, daß der kumulative Runaway-Effekt durch zunehmendes Wachsen dieses Effekts für die Einzelteilchen hervorgerufen werden kann. Dieser Vorgang läßt sich mit den hier angegebenen Gleichungen nicht erfassen, sondern muß (entsprechend dem oben Gesagten) von einer Diskussion des tatsächlichen Verlaufs der Wahrscheinlichkeitsdichte ausgehen.

Anhang I

Quadratur des Stoßintegrals $\mathcal{R}_{rs}^{\text{starr}}$ (44).

$$\mathcal{R}_{rs}^{\text{starr}} = n_r n_s m_{rs} Q_{rs} \frac{(\lambda_r \lambda_s)^{3/2}}{\pi^3} \int \int (\bar{v}_s - \bar{v}_r) g_{rs} e^{-\lambda_r(\bar{v}_r - \bar{v}_r)^2} e^{-\lambda_s(\bar{v}_s - \bar{v}_s)^2} d\bar{v}_r d\bar{v}_s$$

mit $\lambda_r = \frac{m_r}{2kT_r}$; $d\bar{v}_r = d\xi_r d\eta_r d\zeta_r$ entsprechend für s .

1. Substitution: $\bar{v}_r - \bar{v}_r = \mathfrak{V}_r$, $d\bar{v}_r = d\mathfrak{V}_r$, $\bar{v}_s - \bar{v}_s = \mathfrak{V}_s$, $d\bar{v}_s = d\mathfrak{V}_s$.

Die Integrationsgrenzen $(-\infty \dots +\infty)$ bleiben für jede Geschwindigkeitskomponente

$$\bar{v}_r = \begin{pmatrix} \xi_r \\ \eta_r \\ \zeta_r \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{V}_r = \begin{pmatrix} \chi_r \\ \eta_r \\ \zeta_r \end{pmatrix} \text{ dieselben.}$$

²⁵ H. DREICER, Proc. 2nd UN Intern. Conference Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31, Genf 1958.

2. Substitution: $w_{rs} = \frac{\lambda_r}{\lambda_r + \lambda_s} \mathfrak{V}_r + \frac{\lambda_s}{\lambda_r + \lambda_s} \mathfrak{V}_s, \quad c_{rs} = \mathfrak{V}_r - \mathfrak{V}_s,$

$d\mathfrak{V}_r d\mathfrak{V}_s = dw_{rs} dc_{rs}$. (Die Funktionaldeterminante wird 1.)

Die Integrationsgrenzen für die Komponenten von w_{rs} und c_{rs} sind wiederum $-\infty$ und $+\infty$. Der Exponent der Verteilungsfunktion lautet jetzt:

$$\lambda_r \mathfrak{V}_r^2 + \lambda_s \mathfrak{V}_s^2 = (\lambda_r + \lambda_s) w_{rs}^2 + \frac{\lambda_r \lambda_s}{\lambda_r + \lambda_s} c_{rs}^2.$$

3. Substitution: $g_{rs} = c_{rs} + \bar{g}_{rs} = v_r - v_s, \quad \text{mit} \quad \bar{g}_{rs} = \bar{v}_r - \bar{v}_s, \quad dc_{rs} = dg_{rs}. \quad (\text{s. Subst. 1.})$

Auch bei dieser Substitution bleiben die Integrationsgrenzen von $-\infty$ bis $+\infty$. Das Integral lautet:

$$\mathfrak{R}_{rs}^{\text{starr}} = -n_r n_s m_{rs} Q_{rs} \frac{(\lambda_r \lambda_s)^{3/2}}{\pi^3} \iint g_{rs} g_{rs} e^{-(\lambda_r + \lambda_s) w_{rs}^2} e^{-a(g_{rs} - \bar{g}_{rs})^2} dw_{rs} dg_{rs},$$

$$a = \lambda_r \lambda_s / (\lambda_r + \lambda_s), \quad \text{vgl. Gl. (39).}$$

4. Substitution: $g_{rs} \bar{g}_{rs} = |g_{rs}| |\bar{g}_{rs}| \cos \vartheta, \quad g_{rs} = \begin{pmatrix} g_{rs} \cos \vartheta \\ g_{rs} \sin \vartheta \cos \varphi \\ g_{rs} \sin \vartheta \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad dg_{rs} = dg_{rs} d\vartheta d\varphi g_{rs}^2 \sin \vartheta.$

Die Integrationsgrenzen sind für g_{rs} von 0 bis ∞ , ϑ von 0 bis π , φ von 0 bis 2π .

Damit lautet das Integral:

$$\mathfrak{R}_{rs}^{\text{starr}} = -n_r n_s m_{rs} Q_{rs} \frac{(\lambda_r \lambda_s)^{3/2}}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda_r + \lambda_s) w_{rs}^2} dw_{rs} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g_{rs}^2 \cos \vartheta e^{-a(g_{rs}^2 + \bar{g}_{rs}^2 - 2g_{rs} |\bar{g}_{rs}| \cos \vartheta)} g_{rs}^2 \sin \vartheta dg_{rs} d\vartheta d\varphi.$$

5. Substitution: $\cos \vartheta = t; \quad -\sin \vartheta d\vartheta = dt. \quad \text{Integrationsgrenzen:} \quad \begin{matrix} \vartheta = 0, & t = 1, \\ \vartheta = \pi, & t = -1. \end{matrix}$

$$\sqrt{a} g_{rs} = x, \quad dg_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}} dx, \quad \sqrt{a} |\bar{g}_{rs}| = \kappa.$$

Nach Integration über w_{rs} ($dw_{rs} = dw_{rs,x} dw_{rs,y} dw_{rs,z}$) und φ ist:

$$\mathfrak{R}_{rs}^{\text{starr}} = -n_r n_s m_{rs} Q_{rs} \frac{2}{\sqrt{\pi} a} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty x^4 t e^{-\{x^2 + \kappa^2 - 2\kappa x t\}} dt dx.$$

Dieses Integral läßt sich in einfacher Weise analytisch lösen, s. Gl. (44).

Quadratur des Integrals (32)

Nach Substitution 1, 2 und 3 und Integration über w_{ei} ist:

$$\mathfrak{R}_{ei} = -n_e n_i \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} \gamma \frac{2}{\sqrt{\pi}} a^{3/2} \int \frac{g_{ei}}{g_{ei}^3} e^{-a(g_{ei} - \bar{g}_{ei})^2} dg_{ei}.$$

Nach Substitution 4, Integration über φ und Subst. 5 folgt:

$$\mathfrak{R}_{ei} = -n_e n_i \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} \gamma 4 \sqrt{\pi} \frac{a^{3/2}}{\kappa} \int_{t=-1}^{+1} \int_{g_{ei}=0}^\infty t e^{-\{x^2 - 2\kappa x + \kappa^2\}} dx dt.$$

Nach GRÖBNER und HOFREITER²⁶ erhält man für das Integral:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_{-1}^{+1} e^{\kappa^2 t - \kappa^2} \{1 + \Phi(\kappa t)\} t dt.$$

²⁶ W. GRÖBNER u. N. HOFREITER, Integraltafeln II, Springer-Verlag, Wien-Innsbruck 1950, S. 65, Gl. (66).

Setzen wir $z = t$, so geht dieses Integral über in

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{e^{-\kappa^2}}{\kappa^2} \int_{-\kappa}^{+\kappa} e^{z^2} \{1 + \Phi(z)\} z \, dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \Phi(\kappa) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \kappa e^{-\kappa^2} \right\},$$

und damit berechnet sich \Re_{ei} nach (38).

Anhang II

Quadratur des Stoßintegrals für den Energieaustausch: (52)

$$j_{ei} = \pi \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} \left\{ \int \int \frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} \frac{\gamma}{g_{ei}} \bar{f}_e^{(0)} \bar{f}_i^{(0)} \, dv_e \, dv_i - \int \int (v_e^2 - v_i^2) \frac{\gamma}{g_{ei}^3} \bar{f}_e^{(0)} \bar{f}_i^{(0)} \, dv_e \, dv_i \right\}.$$

Nach Substitution 1 (Anhang I) lautet das zweite Integral in der geschweiften Klammer:

$$\int \int \{ \mathfrak{V}_e^2 - \mathfrak{V}_i^2 + v_e^2 - v_i^2 + 2(\mathfrak{V}_e v_e - \mathfrak{V}_i v_i) \} \frac{\gamma}{g_{ei}^3} \bar{f}_e^{(0)} \bar{f}_i^{(0)} \, d\mathfrak{V}_e \, d\mathfrak{V}_i.$$

Nach Subst. 2 (siehe Anhang I) ist

$$\begin{aligned} w_{ei} &= a_e \mathfrak{V}_e + a_i \mathfrak{V}_i \quad \text{und hieraus folgt:} & w_{ei} - a_e c_{ei} &= (a_e + a_i) \mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}_i, \\ c_{ei} &= \mathfrak{V}_e - \mathfrak{V}_i & w_{ei} + a_i c_{ei} &= (a_e + a_i) \mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_e, \end{aligned}$$

damit ist: $\mathfrak{V}_e^2 - \mathfrak{V}_i^2 = (a_i - a_e) c_{ei}^2 + 2 w_{ei} c_{ei} = (a_i - a_e) (g_{ei} - \bar{g}_{ei})^2 + 2 w_{ei} (g_{ei} - \bar{g}_{ei})$

und $2(\mathfrak{V}_e v_e - \mathfrak{V}_i v_i) = \bar{g}_{ei} w_{ei} + (a_i \bar{v}_e + a_e \bar{v}_i) (g_{ei} - \bar{g}_{ei})$.

Bei der Integration über w_{ei} (jede Komponente von $-\infty$ bis $+\infty$) fallen die Glieder proportional zu w_{ei} heraus. Ordnen wir die Glieder nach Potenzen von g_{ei} (bzw. \bar{g}_{ei}), so ist:

$$\begin{aligned} j_{ei} &= n_e n_i \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[\frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} + a_e - a_i \right] \int \frac{\gamma}{g_{ei}} e^{-a(g_{ei} - \bar{g}_{ei})^2} \, dg_{ei} \right. \\ &\quad + [2(a_i - a_e) \bar{g}_{ei} - 2(a_i \bar{v}_e + a_e \bar{v}_i)] \int \frac{\gamma \bar{g}_{ei}}{g_{ei}^3} e^{-a(g_{ei} - \bar{g}_{ei})^2} \, dg_{ei} \\ &\quad \left. + [\bar{v}_i^2 - v_e^2 + 2(a_i \bar{v}_e + a_e \bar{v}_i) + (a_e - a_i) \bar{g}_{ei}^2] \int \frac{\gamma}{g_{ei}^3} e^{-a(g_{ei} - \bar{g}_{ei})^2} \, dg_{ei} \right\}. \end{aligned}$$

Die eckige Klammer des letzten Summanden ergibt Null, damit folgt nach Substitution 4 und Integration über φ sowie Substitution 5:

$$\begin{aligned} j_{ei} &= n_e n_i \frac{z^2 e^4}{m_{ei}} \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[\frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} + a_e - a_i \right] \frac{2\pi}{a} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \gamma x e^{-\{x^2 + \kappa^2 - 2\kappa x\}} \, dt \, dx \right. \\ &\quad \left. + 2[(a_i - a_e) \bar{g}_{ei} - (a_i \bar{v}_e + a_e \bar{v}_i)] 2\pi \frac{\sqrt{a}}{\kappa} \bar{g}_{ei} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \gamma t e^{-\{x^2 + \kappa^2 - 2\kappa x t\}} \, dt \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Bei der Quadratur dieser Ausdrücke ziehen wir γ , das noch von g_{ei}^2 bzw. x^2 abhängt und nur einen geringen Einfluß auf den Integranden ausübt, vor das Integral; dabei ersetzen wir g_{ei}^2 durch \bar{g}_{ei}^2 nach Gln. (37) und (41), wie bei der Berechnung der Reibungskraft. Das zweite Integral wurde schon im Anhang I gelöst. Für das erste erhalten wir nach Integration über t :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} x e^{-\{x^2 + \kappa^2 - 2\kappa x\}} \, dt \, dx &= \frac{1}{2\kappa} \int_0^{\infty} \{e^{-(x-\kappa)^2} - e^{-(x+\kappa)^2}\} \, dx \\ &= \frac{1}{2\kappa} \left\{ \int_{-\kappa}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt - \int_{+\kappa}^{\infty} e^{-t^2} \, dt \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\kappa} \Phi(\kappa). \end{aligned}$$

Setzen wir die Lösungen für beide Integrale in die Gleichung für j_{ei} ein, so erhalten wir nach einiger Umformung Gl. (53).